模块四 分段函数问题

第1节 分段函数常规题型（★★☆）

强化训练

1．（2023•贵州模拟•★）设 $f(x)=\begin{cases}2e^{x-1},x<2\\ \log_3(x^2-1),x\ge 2\end{cases}$，则 $f(f(2))=$（　　）

（A）-1　　（B）1　　（C）2　　（D）4

答案：C

解析：求双层函数值，先算内层，由题意，$f(2)=\log_3(2^2-1)=1$，所以 $f(f(2))=f(1)=2e^{1-1}=2$.

2．（2023•四川成都七中模拟•★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+3),x\le 0\\ x^2-3x-4,x>0\end{cases}$，则 $f(f(-4))=$（　　）

（A）-6　　（B）0　　（C）4　　（D）6

答案：A

解析：求双层函数值，先算内层，由题意，$f(-4)=f(-4+3)=f(-1)=f(-1+3)=f(2)=2^2-3\times 2-4=-6$.

3．（2022•河北模拟•★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2,x\le 1\\ -\log_2(x+1),x>1\end{cases}$，且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$（　　）

（A）$-\frac{7}{4}$　　（B）$-\frac{5}{4}$　　（C）$-\frac{3}{4}$　　（D）$-\frac{1}{4}$

答案：A

解析：因为不确定 a 与 1 的大小，所以通过分类讨论，代入解析式，

若 $a\le 1$，则 $f(a)=2^{a-1}-2=-3$，故 $2^{a-1}=-1$，无解；

若 $a>1$，则 $f(a)=-\log_2(a+1)=-3$，解得：$a=7$，所以 $f(6-a)=f(-1)=2^{-1-1}-2=-\frac{7}{4}$.

4．（★★★）已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，若 $f(f(x))=1$，则 $x=$_____.

答案：3

解析：看到复合结构的方程，先将内层的 $f(x)$ 换元成 t，化整为零，

令 $t=f(x)$，则 $f(f(x))=1$ 即为 $f(t)=1$，

因为 $f(x)$ 的解析式较为简单，容易画图，所以可合图象来解方程 $f(t)=1$，

函数 $y=f(t)$ 的图象如图 1，直线 $y=1$ 与该图象只有 1 个横坐标为 2 的交点 A，所以 $t=2$，故 $f(x)=2$，

函数 $y=f(x)$ 的图象如图 2，直线 $y=2$ 与该图象只有 1 个横坐标为 3 的交点 B，所以 $x=3$.

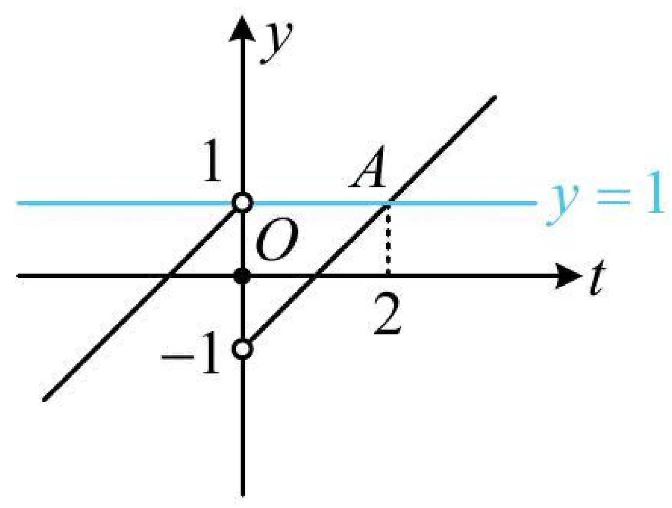


图1

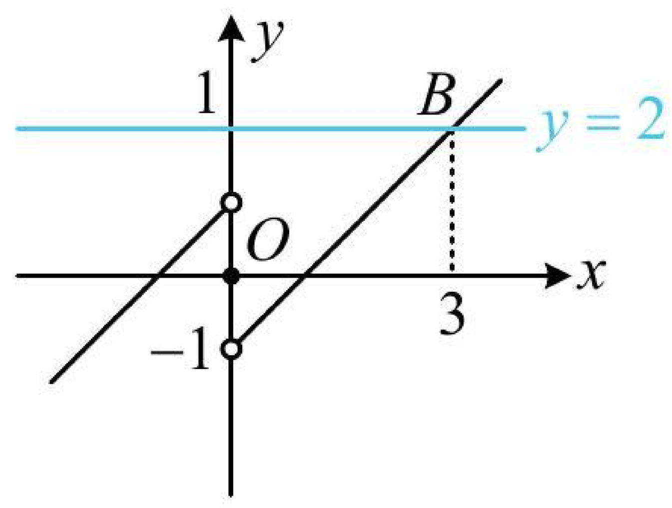


图2

5.（2023·河南模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, x<1\\ x+1, 1\le x<2\\ -\ln(x-1)+1, x\ge 2\end{cases}$，若 $f(f(a))=1$，则实数 $a=$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

答案：B

解析：看到复合结构的方程，先将内层的 $f(a)$ 换元成 t，化整为零，

设 $t=f(a)$，则 $f(f(a))=1$ 即为 $f(t)=1$，

函数 $f(x)$ 每段的解析式都不复杂，容易画图，故可结合图象来解方程 $f(t)=1$，再代入 $t=f(a)$ 解 a，

函数 $y=f(t)$ 的大致图象如图 1，由图可知方程 $f(t)=1$ 仅有 1 个实根 $t=2$，所以 $f(a)=2$，

如图 2，由图可知方程 $f(a)=2$ 的解是 $a=1$.

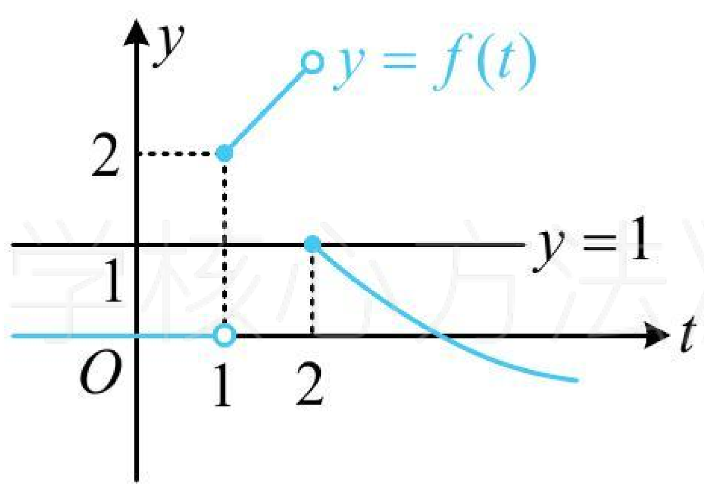


图1

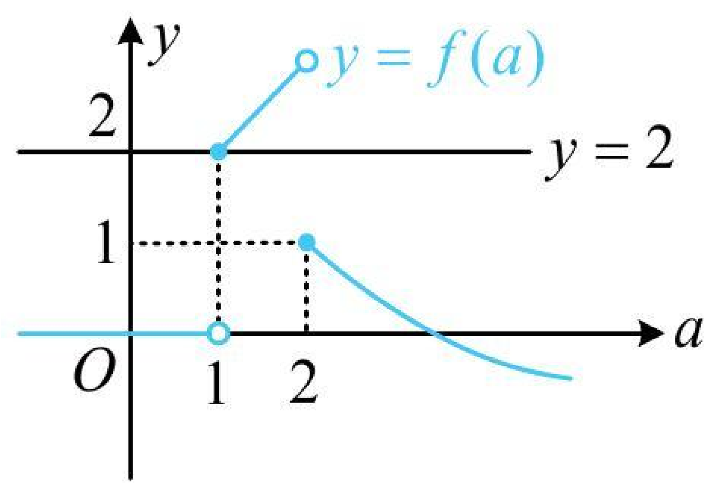


图2

6.（2022·河南期末·★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为_____.

答案：2

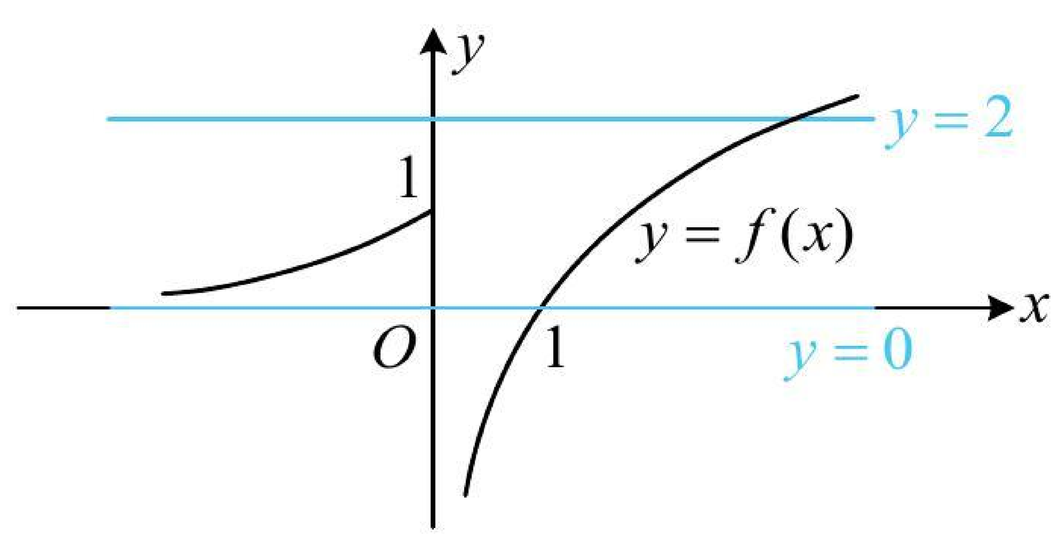
解析：设 $t=f(x)$，则 $f(f(x))-1=0$ 即为 $f(t)-1=0$，也即 $f(t)=1$，

观察解析式可得 $f(t)=1$ 在两段都很好解，所以下面通过讨论求解此方程，

当 $t\le 0$ 时，$f(t)=2^t=1\Rightarrow t=0$；当 $t>0$ 时，$f(t)=\log_2 t=1\Rightarrow t=2$；

所以方程 $f(t)=1$ 有两个解 $t=0$ 或 2，故 $f(x)=0$ 或 $f(x)=2$，作出 $y=f(x)$ 的大致图象如图，

由图可知直线 $y=0$ 和 $y=2$ 各与 $y=f(x)$ 的图象有 1 个交点，所以 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为 2.



7.（2022·甘肃模拟·★★★）若函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x-2a, x<2\\ \log_a x, x\ge 2\end{cases}$ 在 **R** 上单调递减，则实数 a 的取值范围

为_____.

答案：$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解析：先考虑两段分别↘，当 $x<2$ 时，$f(x)=(a-1)x-2a$ 要↘，应有 $a-1<0$，所以 $a<1$ ①；

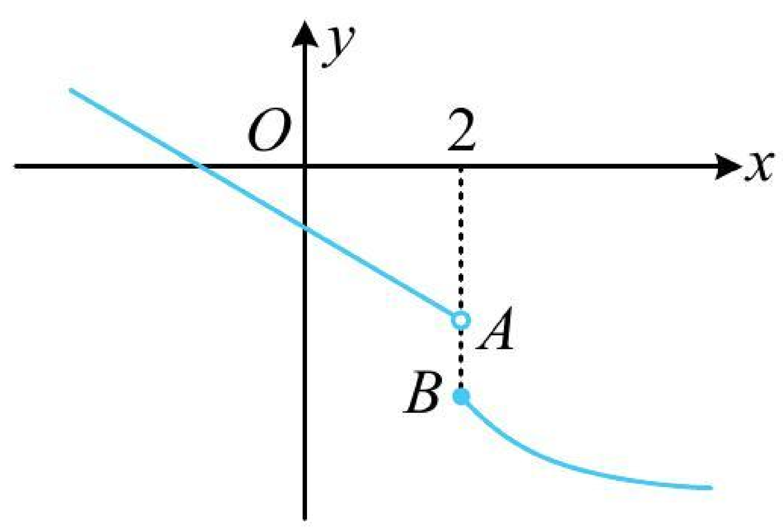
当 $x\geq 2$ 时，$f(x)=\log_a x$ 要↘，应有 $0<a<1$ ②；

再考虑间断点处的拼接情况，如图，将 $x=2$ 代入 $y=(a-1)x-2a$ 可得 $y=-2$，所以 $A(2,-2)$，

同理，$B(2,\log_a 2)$，由图可知 A 应在 B 的上方或 A，B 重合，

所以 $(a-1)\cdot 2-2a\geq \log_a 2$，故 $\log_a 2\leq -2=\log_a \frac{1}{a^2}$③，

由①②可得 $0<a<1$，所以③等价于 $\frac{1}{a^2}\leq 2$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a<1$.



8.（2022•四川达州二诊•★★★）已知单调递增的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases} m^{n-9}, n\geq 10 \\ (\frac{2m}{9}+1)n-21, n<10 \end{cases}$，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[12,+\infty)$　（B）$(1,12)$　（C）$(1,9)$　（D）$[9,+\infty)$

答案：B

解析：先考虑 $\{a_n\}$ 在两段上都单调递增，由题意，应有 $\begin{cases} m>1 \\ \frac{2m}{9}+1>0 \end{cases}$，所以 $m>1$；

其次，在分段处，应满足 $a_9<a_{10}$，所以 $(\frac{2m}{9}+1)\times 9-21<m$，解得：$m<12$，故 $1<m<12$.

9.（2023•江苏南京模拟•★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x+1|, x\leq 0 \\ \ln x+1, x>0 \end{cases}$，若方程 $f(x)=m(m\in\mathbf{R})$ 恰有 3 个不同的实数解 $a,b,c(a<b<c)$，则 $(a+b)c$ 的取值范围是_____.

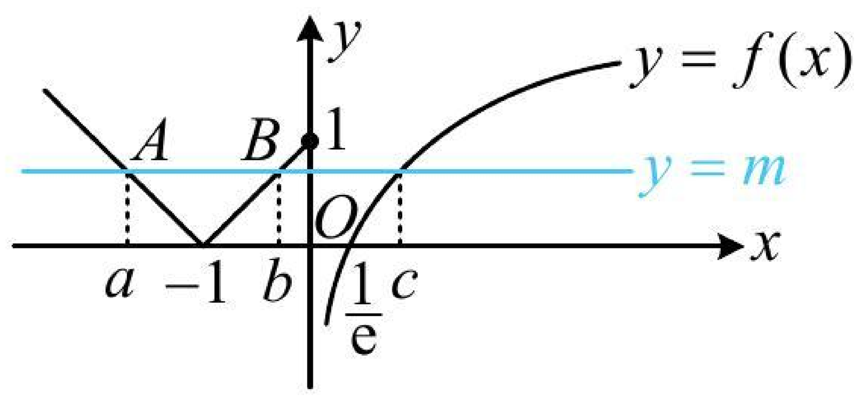
答案：$[-2,-\frac{2}{\mathrm{e}})$

解析：要求 $(a+b)c$ 的取值范围，先由 $f(x)=m$ 将变量统一成 m，

如图，$0<m\leq 1$，且交点 A，B 关于直线 $x=-1$ 对称，所以 $\frac{a+b}{2}=-1$，从而 $a+b=-2$，故 $(a+b)c=-2c$，

下面先分析 c 的范围，c 与 m 有关，已有 m 的范围，故把 c 用 m 表示，

因为 $f(c)=\ln c+1=m$，所以 $c=\mathrm{e}^{m-1}$，又 $0<m\leq 1$，所以 $c\in(\frac{1}{\mathrm{e}},1]$，故 $(a+b)c=-2c\in[-2,-\frac{2}{\mathrm{e}})$.



【反思】等高线问题中，若发现图象有局部对称性（如本题 A 和 B），那么它们的横坐标之和为定值.